DODATEK DO ROCZNIKA POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO

TOM IV

WYDANO Z ZASIŁKU MINISTERSTWA WYZNAŃ RELIGIJNYCH I OŚWIECENIA PUBLICZNEGO

KRAKÓW 1928
DRUKARNIA UNIWERSYTETU JAGIELLOŃSKIEGO
POD ZARZĄDEM J. FILIPOWSKIEGO

DODATEK DO ROCZNIKA POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO

TOM IV

WYDANO Z ZASIŁKU MINISTERSTWA WYZNAŃ RELIGIJNYCH I OŚWIECENIA PUBLICZNEGO

KRAKÓW 1928
DRUKARNIA UNIWERSYTETU JAGIELLOŃSKIEGO
POD ZARZĄDEM J. FILIPOWSKIEGO

Dodatek do Rocznika Polskiego Towarzystwa Matematycznego ukazuje się w miarę potrzeby ogłaszania artykułów, pisanych w języku polskim; dotychczas ukazał się Tom I za rok 1922, Tom II za rok 1923 i Tom III za rok 1927.

K. Abramowicz.

O przekształceniu funkcyj automorficznych wielu zmiennych.

Przedmiotem pracy niniejszej jest zagadnienie o przekształceniu funkcyj automorficznych wielu zmiennych. Aby wyjaśnić przedmiot naszych rozważań, przypomnimy, że Poincaré w rozprawie swojej[1]): „Sur les fonctions fuchsiennes et l'arithmétique", wskazując na analogję między funkcjami Fuchsa i funkcjami eliptycznemi, zauważa, że własność dodawania funkcyj eliptycznych może być uogólniona na funkcje Fuchsa przez rozwiązanie następującego zadania: wyznaczyć podstawienie linjowe

$$Tz = \frac{Az + B}{Cz + D},$$

nie należące do grupy Fuchsa G tak, ażeby funkcja $\varphi(z)$, należąca do grupy G, była z funkcją przekształconą $\varphi(Tz)$ związana zależnością algebraiczną. Ponieważ nie każda funkcja Fuchsa posiada podstawienie T, mające żądaną własność, to zadanie przekształcenia funkcyj Fuchsa polega: 1) na wyznaczeniu funkcyj Fuchsa $\varphi(z)$, dla których zadanie o przekształceniu jest możliwe, 2) na wyznaczeniu podstawień T, dających zależność algebraiczną między $\varphi(z)$ i $\varphi(Tz)$.

§ 1. Uwagi wstępne.

Przechodząc do uogólnienia zagadnienia Poincarégo na funkcje automorficzne wielu zmiennych, będziemy mogli zadanie o przekształceniu tych funkcyj sformułować w sposób następujący:

Wyznaczyć grupę automorficzną G zmiennych $y_1, y_2, \dots y_n$ i grupę ciągłą Γ podstawień linjowych

---

[1]) Oeuvres, t. II, p. 508.

$$(1) \qquad Y_i = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik} y_k + a_i}{\sum\limits_{k=1}^{n} b_k y_k + b}, \quad i = 1, 2, \ldots n$$

tak, aby każde podstawienie T grupy ciągłej Γ po zastosowaniu do n linjowo niezależnych funkcyj automorficznych $f_1, f_2, \ldots f_n$, należących do grupy G, dawało n funkcyj przekształconych

$$\Phi_i(y_1, y_2, \ldots y_n) = f_i(Ty),$$

związanych z początkowemi zapomocą n zależności algebraicznych postaci:

$$R_i(\Phi_i, f_1, f_2, \ldots f_n) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots n).$$

Podobnie, jak w przypadku funkcyj jednej zmiennej, istnieć będzie następujące twierdzenie:

Jeżeli wielościan zasadniczy[1]) P grupy automorficznej G niema punktów wspólnych z granicą obszaru zasadniczego[2]) D grupy, to warunek konieczny i dostateczny na to, żeby między n niezależnemi funkcjami automorficznemi $f_1, f_2, \ldots f_n$, należącemi do grupy G, i n funkcjami przekształconemi $\Phi_i = f_i(Ty)$ istniało n zależności algebraicznych postaci $R_i(\Phi_i, f_1 f_2, \ldots f_n) = 0$, polega na tem, aby grupy G i $T^{-1}GT$ posiadały wspólną podgrupę o wskaźniku skończonym względem każdej z nich.

Przechodząc po tych uwagach do przedmiotu naszych badań, zauważymy, że przy sformułowaniu zagadnienia o przekształceniu funkcyj automorficznych wielu zmiennych mówiliśmy o wyznaczeniu grupy ciągłej Γ podstawień linjowych (1) tak, aby między funkcjami $f_i(y_1, y_2, \ldots y_n)$ i $f_i(Y_1, Y_2, \ldots Y_n)$ istniała zależność algebraiczna; żądaliśmy, innemi słowy, aby istnienie zależności *linjowych* (1) między układami zmiennych:

$$Y_1, Y_2, \ldots Y_n, y_1, y_2, \ldots y_n$$

---

[1]) *Wielościanem zasadniczym* P grupy nieciągłej G nazywamy część obszaru zasadniczego grupy, spełniającą następujące warunki: 1) niema w niej dwu punktów równoważnych względem grupy, 2) każdemu punktowi obszaru zasadniczego odpowiada punkt równoważny w P.

[2]) Kładąc $y_k = y_k' + i y_k''$ i uważając zmienne y_k' i y_k'', jako spółrzędne przestrzeni $2n$-wymiarowej, nazywamy *obszarem zasadniczym* grupy G obszar $2n$-wymiarowy D, spełniający następujące warunki: 1) jest on linjowo zwarty i leży całkowicie w odległości skończonej, 2) przekształca się sam na siebie przy dowolnem podstawieniu grupy G.

pociągało za sobą istnienie zależności algebraicznych między funkcjami automorficznemi $f_i(Y_1, Y_2,\dots Y_n)$ i $f_i(y_1, y_2,\dots y_n)$. Lecz powstaje tutaj pytanie, czy przy przekształceniu funkcyj automorficznych wielu zmiennych, przy istnieniu zależności algebraicznej między funkcjami $f_i(Y_1, Y_2,\dots Y_n)$ i $f_i(y_1, y_2,\dots y_n)$, zależności między zmiennemi Y i y mogłyby *nie być linjowemi* względem układu $Y_1, Y_2,\dots Y_n$.

W pracy niniejszej zajmujemy się tem pytaniem dla funkcyj hyperfuchsowskich n zmiennych w przypadku kiedy wielościan zasadniczy grupy niema punktów wspólnych z obszarem zasadniczym; dochodzimy do wyniku, że poza jednym przypadkiem, w którym grupa hyperfuchsowska G' zawiera w sobie podgrupę o wskaźniku skończonym, będącą zbiorem podstawień, nie zmieniających pewnej przestrzeni linjowej, warunek konieczny istnienia zależności algebraicznych między funkcjami $f_i(Y_1, Y_1,\dots Y_n)$ i $f_i(y_1, y_2,\dots y_n)$ polega na tem, aby zależności między zmiennemi Y i y były linjowemi. Opierając się na tym wyniku, zajmujemy się dalej przekształceniem linjowem funkcyj hyperfuchsowskich n zmiennych w przypadku, kiedy wielościan zasadniczy grupy niema punktów wspólnych z obszarem zasadniczym; metoda nasza opiera się na rozpatrzeniu zbioru punktów stałych grupy hyperfuchsowskiej; dochodzimy do wniosku, że poza przypadkami, w których liczba n zmiennych grupy hyperfuchsowskiej G może być zredukowaną do liczby mniejszej, niż n, istnieją tylko dwa typy grup hyperfuchsowskich, dla których zadanie o przekształceniu jest możliwe; wyznaczamy w tych przypadkach grupy hyperfuchsowskie G i odpowiednie grupy ciągłe Γ, służące do ich przekształcenia.

Zauważymy jeszcze, że *grupa hyperfuchsowska G* określa się w sposób następujący: jeżeli[1])

$$H = x_1 x_1^0 + x_2 x_2^0 + \dots + x_n x_n^0 - x_{n+1} x_{n+1}^0$$

oznacza formę Hermite'a $n+1$ zmiennych $x_1, x_2,\dots x_{n+1}$, a podstawienia

$$X_i = \sum_{k=1}^{n+1} a_{ik} x_k, \quad (i = 1, 2,\dots n+1)$$

tworzą zbiór podstawień, przekształcających formę H samą na siebie, to po wprowadzeniu oznaczeń:

$$x_i : x_{n+1} = y_i, \quad X_i : X_{n+1} = Y_i,$$

$$a_{i,n+1} = a_i, \; a_{n+1,i} = b_i, \; a_{n+1,n+1} = b, \quad (i = 1, 2,\dots n)$$

---

[1]) x_k^0 jest liczbą sprzężoną z x_k.

grupa *nieciągła* G podstawień

$$Y_i = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik} y_k + a_i}{\sum\limits_{k=1}^{n} b_k y_k + b}$$

jest grupą hyperfuchsowską n zmiennych $y_1, y_2, \ldots y_n$.

Obszarem zasadniczym grupy G jest zbiór punktów $(y_1, y_2, \ldots y_n)$, spełniających nierówność[1]):

$$y_1 y_1^0 + y_2 y_2^0 + \ldots + y_n y_n^0 < 1;$$

granicą obszaru zasadniczego grupy G jest powierzchnia $H = 0$.

§ 2. Zadanie podstawowe.

Po zrobionych uwagach przystąpimy do następującego zagadnienia:

Mając 2n niezależnych funkcyj automorficznych

$$\begin{matrix} F_i(Y_1, Y_2, \ldots Y_n), \\ f_i(y_1, y_2, \ldots y_n), \end{matrix} \quad (i = 1, 2, \ldots n)$$

należących odpowiednio do grup hyperfuchsowskich G_F *i* G_f *zmiennych* $Y_1, Y_2, \ldots Y_n$ *i* $y_1, y_2, \ldots y_n$, *zbadać, jakie zależności algebraiczne:*

$$(2) \quad \begin{matrix} \varphi_1(Y_1, Y_2, \ldots Y_n, y_1, y_2, \ldots y_n) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_n(Y_1, Y_2, \ldots Y_n, y_1, y_2, \ldots y_n) = 0, \end{matrix}$$

linjowe względem zmiennych $y_1, y_2, \ldots y_n$, *powinny zachodzić między zmiennemi* Y *i* y, *ażeby między funkcjami* $f_i(y_1, y_2, \ldots y_n)$ *i* $F_i(Y_1, Y_2, \ldots Y_n)$ *zachodziło* n *zależności algebraicznych postaci:*

$$(3) \quad R_i(F_i, f_1, f_2, \ldots f_n) = 0.$$

Oznaczając obszary zasadnicze grup G_F i G_f przez D_Y i D_y, założymy, że obszary te wypełnione są siecią wielościanów zasadniczych P_F i P_f, i że dwa dowolnie wzięte punkty $(C_1, C_2, \ldots C_n)$ i $(c_1, c_1, \ldots c_n)$, związane zależnościami (2), leżą odpowiednio wewnątrz wielościanów zasadniczych P_F^0 i P_f^0.

Z obszaru D_y usuniemy:

1) skończoną liczbę m rozmaitości conajwyżej ∞^{2n-2} punktów $(y_1', y_1'', y_2', y_2'', \ldots y_n', y_n'')$, będących punktami rozgałęzienia dla funk-

---

[1]) Giraud: Leçons sur les fonctions automorphes, Paris, 1920, p. 58.

cyj algebraicznych Y_1, Y_2,... Y_n, określonych równaniami (2); niech te rozmaitości będą:

(4) $$V'_a, V''_a, \dots V^{(m)}_a,$$

gdzie $a^{(i)}$ oznacza liczbę wymiarów rozmaitości $V^{(i)}_a$.

2) wszystkie rozmaitości, równoważne z (4) względem grupy G_f,

3) skończoną liczbę rozmaitości conajwyżej ∞^{2n-2} punktów, którym w przestrzeni $2n$ wymiarowej $(f_1, f_2, \dots f_n)$ odpowiadają rozmaitości, będące zbiorami punktów rozgałęzienia dla funkcyj algebraicznych F_1, F_2,... F_n, określonych równaniami (3).

Obszar otrzymany nazwiemy $\bar{D}_y$ i założymy istnienie zależności (3).

Mieć będziemy wtedy następujące:

Twierdzenie I: *Jeżeli funkcja automorficzna, należąca do grupy G_f, nie jest algebraiczną, to w obszarze $\bar{D}_y$ istnieje nieskończona liczba punktów $S(c_1, c_2, \dots c_n)$ równoważnych z punktem $(c_1, c_2, \dots c_n)$ względem grupy G_f, posiadających tę własność, że, kiedy punkt $(y_1, y_2, \dots y_n)$, wychodząc z punktu $(c_1, c_2, \dots c_n)$ i opisując dowolną krzywą, leżącą wewnątrz obszaru $\bar{D}_y$, dochodzi do punktu $S(c_1, c_2, \dots c_n)$, to punkt odpowiedni $(Y_1, Y_2, \dots Y_n)$ w obszarze D_Y, wychodząc z punktu $(C_1, C_2, \dots C_n)$, dochodzi do punktu $(Y_1, Y_2, \dots Y_n)$, w którym ma miejsce równość:*

$$F_i(Y_1, Y_2, \dots Y_n) = F_i(C_1, C_2, \dots C_n).$$

Dla dowodu zauważymy naprzód, że jeżeli punkt $(y_1, y_2, \dots y_n)$, wychodząc z punktu $(c_1, c_2, \dots c_n)$, opisywać będzie w obszarze $\bar{D}_y$ krzywą C, omijającą podane pod 1), 2), 3) rozmaitości, to w każdym punkcie tej krzywej będą istniały w zupełności oznaczone wartości, jak funkcyj $Y_i(y_1, y_2, \dots y_n)$, określonych równaniami (2), tak i funkcyj:

$$F_i(f_1, f_2, \dots f_n), \quad F_i(Y_1, Y_2, \dots Y_n).$$

Zwrócimy uwagę na punkty $(y_1, y_2, \dots y)$, $(f_1, f_2, \dots f_n)$ i funkcję $F_1(f_1, f_2, \dots f_n)$. Jeżeli punkt $(y_1, y_2, \dots y_n)$ obszaru $\bar{D}_y$, posuwając się wzdłuż krzywej C. dojdzie do punktu $S(c_1, c_2, \dots c_n)$, równoważnego[1]) z $(c_1, c_2, \dots c_n)$ względem grupy G_f, to funkcje $f_1, f_2, \dots f_n$ (jako należące do grupy G_f) powrócą do wartości początkowych:

$$f_1(c), f_2(c), \dots f_n(c),$$

---

[1]) Obieramy na S podstawienie nie eliptyczne, t. j. podstawienie, tworzące grupę 1, S, S^2,... nieskończoną.

gdzie $(c) = (c_1, c_2, \ldots c_n)$, i punkt $(f_1, f_2, \ldots f_n)$ opisze pewną krzywą zamkniętą C_f. Funkcja $F_1(f_1, f_2, \ldots f_n)$, wychodząc z wartości $F_1(f_1(c), f_2(c), \ldots f_n(c))$, dojdzie do wartości, będącej jedną z n_1 wartości

$$(5) \qquad F_1^{(1)}(f_1(c), f_2(c), \ldots f_n(c)), \ldots F_1^{(n_1)}(f_1(c), f_2(c), \ldots f_n(c)),$$

wyznaczonych zależnością algebraiczną $R_1(F_1, f_1, f_2, \ldots f_n) = 0$; między temi wartościami znajduje się i wartość początkowa $F_1(f_1(c), f_2(c), \ldots f_n(c))$, lecz założymy że funkcja F_1 do tej wartości nie powróciła. Jeżeli dalej punkt $(y_1, y_2, \ldots y_n)$, wychodząc z $S(c_1, c_2, \ldots c_n)$ i opisując drogę równoważną względem G_f z poprzednio przebytą, dojdzie do $S^2(c_1, c_2, \ldots c_n)$, to punkt $(f_1, f_2, \ldots f_n)$ opisze powtórnie drogę C_f, a funkcja $F_1(f_1, f_2, \ldots f_n)$ przyjmie jedną[1]) z wartości (5). Jeżeli punkt $(y_1, y_2, \ldots y_n)$ przechodzić będzie dalej przez punkty równoważne

$$S^2(c_1, c_2, \ldots c_n), \quad S^3(c_1, c_2, \ldots c_n) \ldots$$

to, ponieważ wartości w ciągu (5) jest skończona liczba, istnieć będzie przy pewnem $i_1 \leqslant n_1$ punkt równoważny $S^{i_1}(c_1, c_2, \ldots c_n)$, po przejściu przez który punktu $(y_1, y_2, \ldots y_n)$, wartość funkcji $F_1(f_1, f_2, \ldots f_n)$ będzie równa początkowej

$$F_1(f_1(c), f_2(c), \ldots f_n(c)).$$

Lecz wtedy punkt $(Y_1, Y_2, \ldots Y_n)$ obszaru D_Y, wychodząc z punktu $(C_1, C_2, \ldots C_n)$, w którym jest

$$F_1(C_1, C_2, \ldots C_n) = F_1(f_1(c), f_2(c), \ldots f_n(c)),$$

dojdzie do takiego punktu

$$(Y_1, Y_2, \ldots Y_n) \neq (C_1, C_2, \ldots C_n),$$

w którym będzie:

$$F_1(Y_1, Y_2, \ldots Y_n) = F_1(C_1, C_2, \ldots C_n).$$

Punktów $S^{i_1}(c_1, c_2, \ldots c_n)$ będzie nieskończona liczba; niech one będą:

$$(6) \qquad S^{i_1}, \; S^{i_2}, \; S^{i_3}, \ldots$$

---

[1]) różną od poprzedniej; ponieważ, gdyby wartość ta równała się poprzedniej, to droga C_f, przebyta w odwrotnym kierunku, musiałaby przeprowadzać tę wartość w dwie wartości różne.

Zakładając teraz, że punkt $(y_1, y_2, \dots y_n)$ doszedł do jednego z tych punktów $S^{i_1}(c_1, c_2, \dots c_n)$ i że funkcja $F_1(Y_1, Y_2, \dots Y_n)$ powróciła do wartości $F_1(C_1, C_2, \dots C_n)$, otrzymamy dalej z następnej zależności algebraicznej

$$(7) \qquad R_2(F_2, f_1, f_2, \dots f_n) = 0,$$

że odpowiadająca temu punktowi wartość funkcji $F_2(f_1, f_2, \dots f_n)$ będzie mogła być tylko jedną ze skończonej liczby n_2 wartości:

$$(8) \qquad F_2^{(1)}(f_1(c), f_2(c), \dots f_n(c)), \dots F_2^{(n_2)}(f_1(c), f_2(c), \dots f_n(c),$$

wyznaczonych równaniem (7). Jeżeli, podobnie jak poprzednio, punkt $(y_1, y_2, \dots y_n)$ przechodzić będzie kolejno przez punkty równoważne (6), to otrzymywane za każdym razem odpowiednie wartości $F_2(f_1, f_2, \dots f_n)$ będą stale wartościami z ciągu (8); podobnie, jak poprzednio, stwierdzimy, że będzie musiała w ciągu (6) istnieć nieskończona liczba punktów:

$$S^{j_1}, \; S^{j_2}, \; S^{j_3}, \dots$$

po dojściu do których punktu $(y_1, y_2, \dots y_n)$, obie funkcje $F_1(f_1, f_2, \dots f_n)$ i $F_2(f_1, f_2, \dots f_n)$ wrócą do wartości początkowych

$$F_1(f(c)), \quad F_2(f(c)),$$

a punkt $(Y_1, Y_2, \dots Y_n)$ w obszarze D_Y dojdzie do takiego punktu $(Y_1, Y_2, \dots Y_n)$, w którym będzie:

$$F_1(Y) = F_1(C_1, C_2, \dots C_n),$$
$$F_2(Y) = F_2(C_1, C_2, \dots C_n).$$

Rozumując w ten sposób dalej, udowodnimy nasze twierdzenie; stwierdzimy w ten sposób istnienie w obszarze $\overline{D}_y$ nieskończonej liczby punktów równoważnych z punktem $(c_1, c_2, \dots c_n)$, posiadających tę własność, że, kiedy punkt $(y_1, y, \dots y_n)$ dojdzie do któregokolwiek z nich, to wtedy odpowiedni punkt $(Y_1, Y_2, \dots Y_n)$ w obszarze D_Y dojdzie do takiego punktu $(Y_1, Y_2, \dots Y_n)) \neq (C_1, C_2, \dots C_n)$, w ktorym będzie:

$$(9) \qquad F_i(Y_1, Y_2, \dots Y_n) = F_i(C_1, C_2, \dots C_n)$$

dla $i = 1, 2, \dots n$.

Z dowiedzionego twierdzenia nie można wywnioskować, że punkty końcowe $(Y_1, Y_2, \dots Y_n)$, w których zachodzić będzie rów-

ność (9), będą punktami równoważnymi z punktem $(C_1, C_2, \ldots C_n)$ względem grupy G_F; niektóre bowiem z punktów $(Y_1, Y_2, \ldots Y_n)$ mogą leżeć nawet w tym samym wielościanie zasadniczym P_F^0, co i punkt $(C_1, C_2, \ldots C_n)$, i należeć do liczby tych r punktów wielościanu zasadniczego[1]), w których funkcja automorficzna $F_i(Y_1, Y_2, \ldots Y_n)$ przyjmuje r jednakowych wartości równych $F_i(C_1, C_2, \ldots C_n)$.

Mieć będziemy

Twierdzenie II: *Jeżeli funkcja automorficzna, należąca do grupy G_f, nie jest algebraiczną, to grupy hyperfuchsowskie G_F i G_f zawierają w sobie dwie nieskończone podgrupy izomorficzne G'_F i G'_f podstawień*

$$Y'_i = \frac{\sum_{k=1}^{n} A_{ik} Y_k + A_i}{\sum_{k=1}^{n} B_k Y_k + B}, \quad y'_i = \frac{\sum_{k=1}^{n} a_{ik} y_k + a_i}{\sum_{k=1}^{n} b_k y_k + b},$$

posiadających tę własność, że zastosowanie którychkolwiek dwu podstawień odpowiednich tych grup do zależności algebraicznych

$$(10) \qquad \varphi_p(Y_1, Y_2, \ldots Y_n, y_1, y_2, \ldots y_n) = 0, \; p = 1, 2, \ldots n$$

pozostawia te zależności bez zmiany; innemi słowy, wyrażenia $\varphi_p(Y', y')$ po usunięciu mianownika różnią się tylko czynnikiem stałym od $\varphi_p(Y, y)$.

W samej rzeczy, jak już zauważyliśmy, w poszczególnych wielościanach zasadniczych P_F istnieć może tylko pewna skończona liczba $\leqslant r$ punktów $(Y_1, Y_2, \ldots Y_n)$, dla których jest

$$F_i(Y) = F_i(C);$$

muszą przeto w nieskończonej liczbie wielościanów P_F istnieć punkty $(Y_1, Y_2, \ldots Y_n)$, spełniające warunek $F_i(Y) = F_i(C)$; te punkty $(Y_1, Y_2, \ldots Y_n)$ będą równoważne z punktem $(C_1, C_2, \ldots C_n)$ względem grupy G_F. Obierzemy dowolnie dwa takie punkty (Y) i (Y'), odpowiadające dwu punktom

$$S(c_1, c_2, \ldots c_n), \quad S'(c_1, c_2, \ldots c_n)$$

równoważnym względem grupy G_f z obszaru $\overline{D}_v$. Pierwsze dwa punkty, jako równoważne względem grupy G_F, związane będą zależnością postaci:

---

[1]) Giraud: Leçons sur les fonctions automorphes, p. 40.

$$(11) \qquad Y'_i = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} A_{ik} Y_k + A_i}{\sum\limits_{k=1}^{n} B_k Y_k + B},$$

która będzie jednem z podstawień grupy G_F; punkty zaś $S(c_1, c_2, \ldots c_n)$ i $S'(c_1, c_2, \ldots c_n)$, jeżeli ich spółrzędne oznaczymy odpowiednio przez $(y_1, y_2, \ldots y_n)$ i $(y'_1, y'_2, \ldots y'_n)$, związane będą zależnością postaci

$$(12) \qquad y'_i = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik} y_k + a_i}{\sum\limits_{k=1}^{n} b_k y_k + b},$$

należącą do podstawień grupy G_f. Zbiory podstawień (11) i (12) utworzą dwie grupy izomorficzne, które oznaczyliśmy przez G'_F i G'_f. Po przejściu punktu $(y_1, y_2, \ldots y_n)$ z miejsca $S(c_1, c_2, \ldots c_n)$ w $S'(c_1, c_2, \ldots c_n)$ wartości funkcyj algebraicznych

$$Y_1(y), Y_2(y), \ldots Y_n(y),$$

wyznaczonych w punkcie $S(c)$ równaniami (10), przejdą na wartości:

$$Y_i(y'_1, y'_2, \ldots y'_n),$$

które będą, zgodnie z (11), wyrażeniami:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} A_{ik} Y_k + A_i\right) : \left(\sum_{k=1}^{n} B_k Y_k + B\right).$$

Istnieć więc będzie n zależności:

$$(13) \qquad Y_i(y'_1, y'_2, \ldots y'_n) = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} A_{ik} Y_k(y) + A_i}{\sum\limits_{k=1}^{n} B_k Y_k(y) + B}$$

między n funkcjami algebraicznemi $Y_1, Y_2, \ldots Y_n$ w punktach (y) i (y').

Zależności (13) wyrażają własność równania $\varphi_p(Y, y) = 0$, polegającą na tem, że po zamianie w niem zmiennych Y i y na zmienne Y' i y', związane z poprzedniemi za pomocą zależności (11) i (12), równania te pozostaną bez zmiany; innemi słowy, równania

$$\varphi_p\left(\ldots \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} A_{ik} Y_k + A_i}{\sum\limits_{k=1}^{n} B_k Y_k + B}, \ldots \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik} y_k + a_i}{\sum\limits_{k=1}^{n} b_k y_k + b}\right) = 0,$$

po usunięciu w nich mianowników, redukują się do równań $\varphi_p(Y, y) = 0$; zbiory więc G'_F i G'_f będą rzeczywiście grupami izomorficznemi.

§ 3. **Warunki konieczne rozwiązalności zadania podstawowego.**

Pomijając, jak i poprzednio, przypadek, kiedy funkcja automorficzna, należąca do grupy G_f, jest algebraiczną, mięć będziemy następujące

Twierdzenie III: *Jeżeli grupa hyperfuchsowska* G'_f *zmiennych* $y_1, y_2, \ldots y_n$ *nie zawiera podgrupy o wskaźniku skończonym, będącej zbiorem podstawień, pozostawiających bez zmiany pewną hyperpłaszczyznę przestrzeni urojonej* $(y_1, y_2, \ldots y_n)$, *to warunek konieczny istnienia n zależności algebraicznych*

$$R_i(F_i, f_1, f_2, \ldots f_n) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots n$$

między n linjowo niezależnemi funkcjami automorficznemi $f_1, f_2, \ldots f_n$, *grupy* G_f *i n linjowo niezależnemi funkcjami automorficznemi* $F_1, F_2, \ldots F_n$, *należącemi do grupy hyperfuchsowskiej* G_F *zmiennych* $Y_1, Y_2, \ldots Y_n$, *polega na tem, żeby zależności:*

$$(14) \qquad \varphi_k(Y_1, Y_2, \ldots Y_n, y_1, y_2, \ldots y_n) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots n$$

zachodzące między zmiennemi Y i y, były linjowemi.

Dla dowodu zwrócimy uwagę na to, że, zgodnie z twierdzeniem II, równania $\varphi_k(Y, y) = 0$ pozostają bez zmiany przy odpowiednich podstawieniach grup G'_F i G'_f.

Rozpatrzymy grupę G'_f; przy podstawieniach grupy G'_f rozmaitości (str. 5):

$$(15) \qquad V'_a, V''_a, \ldots V^{(m)}_a,$$

które są zbiorami punktów rozgałęzienia funkcyj algebraicznych $Y_1, Y_2, \ldots Y_n$, przekształcą się: 1) albo na *nieskończoną* liczbę, 2) albo na *skończoną* liczbę rozmaitości, będących również zbiorami punktów rozgałęzienia funkcyj $Y_1, Y_2, \ldots Y_n$. Jeżeliby zaszedł przypadek 1), to funkcje Y_i posiadałyby nieskończoną liczbę rozmaitości, będących zbiorami punktów rozgałęzienia tych funkcyj; funkcje więc Y_i, będąc algebraicznemi, nie powinny w tym przypadku posiadać ani jednej rozmaitości (15), czyli równania $\varphi_k(Y, y) = 0$ powinny być 1-go stopnia względem $Y_1, Y_2, \ldots Y_n$.

W przypadku 2), kiedy podstawienia grupy G'_f dawałyby *skończoną* liczbę q rozmaitości, będących zbiorami punktów rozgałęzienia funkcyj $Y_1, Y_2, \ldots Y_n$, rozmaitości te znajdowały by się w ciągu (15); podstawienia więc grupy G'_f mogłyby conajwyżej przestawiać te rozmaitości między sobą. Lecz wtedy grupa G'_f zawierałaby w sobie podgrupę nieskończoną g'_f o wskaźniku skończonym, której każde podstawienie pozostawiałoby bez zmiany wszystkie q rozmaitości V_a. Rozmaitości V_a musiałyby być przestrzeniami linjowemi, ponieważ między spółczynnikami a_{ik}, b_i, a_i, b grupy hyperfuchsowskiej zachodzi $(n+1)(n+2)$: 2 zależności (str. 15); grupa więc g'_f musiałaby być zbiorem podstawień, pozostawiającym bez zmiany conajmniej jedną hyperpłaszczyznę przestrzeni urojonej $(y_1, y_2, \ldots y_n)$.

Jeżeli teraz, zgodnie z założeniem twierdzenia, przypuścimy, że grupa G'_f nie zawiera podgrupy, pozostawiającej bez zmiany hyperpłaszczyznę przestrzeni urojonej $(y_1, y_2, \ldots y_n)$, to, stosując grupę G'_f do rozmaitości (14), otrzymać będziemy mogli tylko nieskończoną liczbę rozmaitości V, t. j. zależności φ_p linjowe: ponieważ, gdyby grupa G'_f dawała skończoną liczbę rozmaitości, to, zgodnie z tylko co powiedzianem wyżej, istniałaby w grupie G'_f podgrupa g'_f o wskaźniku skończonym, której każde podstawienie pozostawiałoby bez zmiany pewną hyperpłaszczyznę, co sprzeciwia się założeniu.

Udowodniliśmy więc, że, jeżeli grupa G'_f nie zawiera podgrupy o wskaźniku skończonym, będącej zbiorem podstawień, pozostawiających bez zmiany pewną hyperpłaszczyznę przestrzeni $(y_1, y_2, \ldots y_n)$, to zależności (14) muszą być postaci:

$$(16) \qquad Y_i = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_{ik} y_k + \alpha_i}{\sum\limits_{k=1}^{n} \beta_k y_k + \beta}; \quad i = 1, 2, \ldots n$$

oznaczymy otrzymaną zależność linjową przez $T(y_1, y_2, \ldots y_n)$.

Pozostaje do rozpatrzenia, jakiemi mogą być zależności (14), w przypadku, kiedy grupa hyperfuchsowska G_f jest zbiorem podstawień, pozostawiających bez zmiany pewną hyperpłaszczyznę; przypadek ten rozpatrzymy dalej.

Jeżeli grupa G_f nie jest zbiorem podstawień, nie zmieniających pewnej hyperpłaszczyzny, to mieć będziemy następujące

Twierdzenie IV: *Ażeby miedzy n niezależnemi funkcjami automorficznemi $F_1, F_2, \ldots F_n$, należącemi do grupy hyperfuchsowskiej G_f*

zmiennych $Y_1, Y_2, \ldots Y_n$, *i* n *niezależnemi funkcjami automorficznemi* $f_1, f_2, \ldots f_n$, *należącemi do grupy* G_f *zmiennych* $y_1, y_2, \ldots y_n$, *istniało* n *zależności algebraicznych postaci:*

$$R_i(F_i, f_1, f_2, \ldots f_n) = 0,$$

jest koniecznem, aby zależności linjowe T, *zachodzące między zmiennemi* Y *i* y, *posiadały tę własność, że grupy* G_f *i* $T^{-1} G_F T$ *zmiennych* $y_1, y_2, \ldots y_n$ *mają wspólną podgrupę o wskaźniku skończonym względem każdej z tych grup.*

W samej rzeczy, jeżeli funkcje $F_i(Y) = F_i(T_y)$, należące do grupy $T^{-1} G_F T$, oznaczymy przez $\Phi_i(y_1, y_2, \ldots y_n)$, to będą spełniały się zależności:

$$(17) \qquad R_i(\Phi_i, f_1, f_2, \ldots f_n) = 0.$$

Jeżeli oznaczymy przez g zbiór wszystkich podstawień wspólnych grupom G_f i $T^{-1} G_F T$, zbiór ten będzie zbiorem *wszystkich* podstawień, nie zmieniających wszystkich $2n$ funkcyj

$$f_1, f_2, \ldots f_n, \Phi_1, \Phi_2, \ldots \Phi_n$$

jednocześnie.

Zastosujemy do zależności (17) wszystkie podstawienia grupy G_f; wtedy funkcje $f_1, f_2, \ldots f_n$ zostaną bez zmiany (jako należące do grupy G_f), funkcje zaś Φ_i będą mogły przyjmować pewną skończoną liczbę m_i wartości:

$$(18) \qquad \Phi_i', \Phi_i'', \ldots \Phi_i^{(m_i)},$$

spełniających równanie algebraiczne (17); ze względu więc na nieskończoną liczbę podstawień grupy G_f i na skończoną liczbę wartości (18), istnieć będzie musiała pewna nieskończona podgrupa g_i grupy G_f o wskaźniku *skończonym*, której podstawienia nie będą zmieniały żadnej z wartości (18), a tem samem i funkcji Φ_i.

Zastosujemy dalej wszystkie podstawienia otrzymanej grupy g_i do zależności:

$$R_j(\Phi_j, f_1, f_2, \ldots f_n) = 0, \quad j \neq i = 1, 2, \ldots n$$

to, ponieważ wszystkie funkcje $f_1, f_2, \ldots f_n$ (jako należące do grupy G_f) zostaną bez zmiany, a Φ_j przyjmować będzie tylko pewną skończoną liczbę m_j wartości, to wywnioskujemy o istnieniu pewnej podgrupy g_{ij} grupy g_i o wskaźniku *skończonym* względem g i G_f,

nie zmieniającej ani Φ_i, ani Φ_j. Postępując podobnie dalej, udowodnimy istnienie podgrupy g', nie zmieniającej wszystkich funkcyj $\Phi_1, \Phi_2, \ldots \Phi_n$ i mającej wskaźnik skończony względem G_f; a ponieważ grupa g' (jako zbiór podstawień, nie zmieniających wszystkich funkcyj $f_1, f_2, \ldots f_n, \Phi_1, \Phi_2, \ldots \Phi_n$) musi być podgrupą poprzednio wprowadzonej grupy g (wspólnej dla grup G_f i $T^{-1} G_F T$), więc grupa g będzie również musiała mieć wskaźnik *skończony* względem grupy G_f.

W sposób podobny, jeżeli do n zależności:

$$R_i(\Phi_i, f_1, f_2, \ldots f_n) = 0 \tag{19}$$

stosować będziemy podstawienia grupy $T^{-1} G_F T$, to funkcje Φ_i (jako należące do grupy $T^{-1} G_F T$) zostawać będą bez zmiany, a funkcje $f_1, f_2, \ldots f_n$ przyjmować będą wartości (w skończonej liczbie), określone równaniami (19). Ponieważ istnieć będzie tylko skończona liczba kombinacyj tych wartości, to, rozumując podobnie, jak poprzednio, stwierdzić będziemy musieli istnienie pewnej podgrupy g'' grupy $T^{-1} G_F T$ o wskaźniku skończonym, nie zmieniającej wszystkich funkcyj $f_1, f_2, \ldots f_n$; zważając więc na to, że podobnie, jak poprzednio, grupa g'' musi być podgrupą grupy g, wnosimy, że grupa g mieć będzie również wskaźnik skończony względem grupy $T^{-1} G_F T$; twierdzenie zostało w ten sposób udowodnione.

Jeśli w otrzymanem twierdzeniu przyjmiemy, że

$$F_i = f_i, \quad G_f = G_F = G,$$

a podstawienia

$$Y_i = \frac{\sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} y_k + \alpha_i}{\sum_{k=1}^{n} \beta_k y_k + \beta}$$

oznaczać będziemy przez T, to otrzymamy[1])

Twierdzenie V: *Jeżeli grupa hyperfuchsowska G' nie zawiera w sobie podgrupy o wskaźniku skończonym, będącej zbiorem podstawień, pozostawiających bez zmiany pewną hyperpłaszczyznę przestrzeni urojonej* ($y_1, y_2, \ldots y_n$) *i jeżeli wielościan zasadniczy P grupy niema*

---

[1]) Zakładamy, jak i poprzednio, że funkcje automorficzne $f_1, f_2, \ldots f_n$ nie są algebraicznemi.

punktów wspólnych z granicą obszaru zasadniczego, to warunek konieczny i dostateczny istnienia n zależności algebraicznych

$$R_i(f_i(T_v), f_1, f_2, \dots f_n) = 0, \quad i = 1, 2, \dots n$$

między n funkcjami niezależnemi $f_1, f_2, \dots f_n$, *należącemi do grupy G i n funkcjami przekształconemi*

$$f_1(T_v), f_2(T_v), \dots f_n(T_v)$$

za pomocą podstawienia linjowego T, polega na tem, aby grupy G i $T^{-1} G T$ *miały wspólną podgrupę o wskaźniku skończonym względem każdej z nich.*

Dostateczność tego warunku stwierdzamy, zwracając uwagę na to, że, jeżeli grupy G i $T^{-1} G T$ mają wspólną podgrupę g, to do tej podgrupy należeć będzie $2n$ funkcyj

$$(20) \qquad f_1, f_2, \dots f_n, \; f_1(T_v), f_2(T_v), \dots f_n(T_v);$$

na podstawie zaś znanej własności funkcyj automorficznych[1]), między każdemi $n+1$ funkcjami (20), przy zrobionych w twierdzeniu założeniach, istnieć będzie zależność algebraiczna.

§ 4. Grupy hyperfuchsowskie, nie zmieniające danej hyperpłaszczyzny, lub danego punktu.

Przejdziemy obecnie do nie rozpatrzonego jeszcze przypadku specjalnego, kiedy grupa G_f jest zbiorem podstawień, nie zmieniających pewnej hyperpłaszczyzny. W tym celu rozpatrzeć musimy grupy hyperfuchsowskie, nie zmieniające danego punktu lub danej hyperpłaszczyzny.

Oznaczać będziemy przez

$$(x') = \overline{V}(x),$$

gdzie

$$(21) \qquad \overline{V} = \begin{vmatrix} a_{11}, \dots & a_{1n}, & a_1 \\ . \quad . & . \quad . & . \\ a_{n1}, \dots & a_{nn}, & a_n \\ b_1, \dots & b_n, & b \end{vmatrix},$$

podstawienia grupy $\overline{G}$, nie zmieniającej formy Hermitea:

$$H = x_1 x_1^0 + x_2 x_2^0 + \dots + x_n x_n^0 - x_{n+1} x_{n+1}^0,$$

---

[1]) Giraud: Leçons sur les fonctions automorphes, 1920, § 31.

wtedy zbiór podstawień (nieciągłych)

$$y_i' = \frac{\sum_{k=1}^{n} a_{ik} y_k + a_i}{\sum_{k=1}^{n} b_k y_k + b},$$

w których $y_i = x_i : x_{n-1}$, będzie grupą *hyperfuchsowską* n zmiennych $y_1, y_2, \ldots y_n$, którą oznaczać będziemy przez G. Granicę obszaru zasadniczego D grupy G nazywać będziemy powierzchnią H; jej równanie w przestrzeni urojonej $(y_1, y_2, \ldots y_n)$ jest $H = 0$.

Zauważymy jeszcze, że między spółczynnikami a_{ik}, a_i, b_k, b podstawień (21) grupy G zachodzą zależności:

(22) $$\sum_{i=1}^{n} a_i a_i^0 - b b^0 = -1,$$

(23) $$\sum_{i=1}^{n} a_{is} a_{is}^0 - b_s b_s^0 = 1, \quad s = 1, 2, \ldots n$$

(24) $$\sum_{i=1}^{n} a_{is} a_{ir}^0 - b_s b_r^0 = 0, \quad s \neq r = 1, 2, \ldots n$$

(25) $$\sum_{i=1}^{n} a_{is} a_i^0 - b_s b^0 = 0, \quad s = 1, 2, \ldots n$$

w liczbie $(n+1)(n+2):2$.

Rozpatrzymy te podgrupy grupy hyperfuchsowskiej G, które nie zmieniają danego punktu $(c_1, c_2, \ldots c_n, c_{n+1})$ lub też danej hyperpłaszczyzny

(26) $$C_1 x_1 + C_2 x_2 + \ldots + C_n x_n + C_{n+1} x_{n+1} = 0$$

przestrzeni urojonej $(y_1, y_2, \ldots y_n)$.

Rozróżniać będziemy 3 przypadki: 1) kiedy punkt $(c_1, c_2, \ldots c_{n+1})$ spełnia nierówność:

$$\sum_{i=1}^{n} c_i c_i^0 - c_{n+1} c_{n+1}^0 < 0,$$

co wyrażać będziemy, mówiąc, że on leży *wewnątrz* powierzchni H, 2) kiedy on spełnia nierówność:

$$\sum_{i=1}^{n} c_i c_i^0 - c_{n+1} c_{n+1}^0 > 0,$$

co wyrażać będziemy, mówiąc, że on leży *zewnątrz* powierzchni H, 3) kiedy zachodzi równość: $c_1 c_1^0 + c_2 c_2^0 + \ldots + c_n c_n^0 = c_{n+1} c_{n+1}^0$; mówić

będziemy w ostatnim przypadku, że punkt $(c_1, c_2, \dots c_{n+1})$ *leży na powierzchni* H.

W przypadku pierwszym mamy

Twierdzenie VI: *Każda podgrupa* γ *grupy hyperfuchsowskiej, nie zmieniająca danego punktu, leżącego wewnątrz powierzchni* H, *lub też nie zmieniająca dowolnie danej hyperpłaszczyzny, nie przecinającej powierzchni* H, *da się po odpowiedniem dobraniu pewnego podstawienia* Q *grupy hyperfuchsowskiej, przedstawić, jako grupa podobna do grupy* $Q^{-1}\gamma Q$ *utworzonej z podstawień postaci:*

$$V = \begin{vmatrix} a_{11}, \dots & a_{1n}, & 0 \\ . & . & . \\ a_{n1}, \dots & a_{nn}, & 0 \\ 0, \dots & 0, & 1 \end{vmatrix},$$

w których

$$(27) \qquad \sum_{i=1}^{n} a_{is} a_{is}^0 = 1, \quad \sum_{i=1}^{n} a_{is} a_{ir}^0 = 0, \quad r \neq s = 1, 2, \dots n$$

Zakładając, że $c_1 c_1^0 + \dots + c_n c_n^0 - c_{n+1} c_{n+1}^0 < 0$, przyjmiemy za podstawienie $\overline{Q}$ jedno z podstawień grupy $\overline{G}$, przenoszących punkt $(c_1, c_2, \dots c_{n+1})$ w punkt o spółrzędnych:

$$x_1 = 0, \; x_2 = 0, \dots \; x_n = 0, \; x_{n+1} = 1;$$

podstawienie takie istnieje ze względu na przechodniość[1]) grupy $\overline{G}$ w obszarze $H < 0$. Po obraniu podstawienia $\overline{Q}$, wyznaczymy podstawienia

$$(28) \qquad \begin{vmatrix} a_{11}, \dots & a_{1n}, & a_1 \\ . & . & . \\ a_{n1}, \dots & a_{nn}, & a_n \\ b_1, \dots & b_n, & b \end{vmatrix}$$

nie zmieniające punktu $(0, 0, \dots 0, 1)$; będzie oczywiście, musiało być:

$$a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0.$$

Z wzoru zaś (22) otrzymamy wtedy:

$$b b^0 = 1, \quad b = e^{\varphi i};$$

z wzoru zaś (25):

$$\sum_{i=1}^{n} a_{is} a_i^0 - b_s b^0 = 0$$

[1]) Giraud, l. c., p. 55.

przy $s=1,2,\ldots n$ otrzymamy (zważając, że $a_i=0$, $b\neq 0$):

$$b_s=0,\ (s=1,2,\ldots n);$$

szukane podstawienia będą postaci:

(29)
$$\begin{vmatrix} a_{11},\ldots & a_{1n}, & 0 \\ . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \\ a_{n1},\ldots & a_{nn}, & 0 \\ 0,\ldots & 0, & e^{\varphi i} \end{vmatrix},$$

gdzie

$$\sum_{i=1}^{n} a_{is}a_{is}^0=1,\quad \sum_{i=1}^{n} a_{is}a_{ir}^0=0,\quad s\neq r=1,2,\ldots n.$$

Przechodząc do hyperpłaszczyzn

(30) $$C_1x_1+C_2x_2+\ldots+C_nx_n+C_{n+1}x_{n+1}=0,$$

nie przecinających powierzchni H, obierzemy za $\bar{Q}$ podstawienie[1]), przekształcające daną hyperpłaszczyznę (30) na hyperpłaszczyznę $x_{n+1}=0$, która nie przecina również powierzchni H. Wyznaczymy więc podstawienia (28), nie zmieniające hyperpłaszczyzny $x_{n+1}=0$; mieć będziemy najwpierw:

$$b_1=b_2=\ldots=b_n=0,$$

wzór zaś (25):

$$\sum_{i=1}^{n} a_{is}a_i^0=0,\quad s=1,2,\ldots n$$

---

[1]) Łatwo widzieć, że, oznaczając przez $A_{i,n+1}$ $(i=1,2,\ldots n+1)$ spółczynniki elementów ostatniej kolumny wyznacznika (28), wystarczy dla wyznaczenia $\bar{Q}$ spełnić warunki: $C_i=(-1)^{i+n+1}A_{i,n+1}$. Lecz w podstawieniu (28), począwszy od pierwszej kolumny, można w każdej kolumnie obrać kolejno po $n, n-1,\ldots 2, 1$ elementów dowolnie; obierzemy przeto jeden z elementów, np. a_{n1} tak, aby zachodziła równość

$$(-1)^{1+n+1}A_{1,n+1}=C_1\neq 0,$$

elementy zaś $a_{11}, a_{12},\ldots a_{1n}$ pierwszego wiersza obierzemy tak, aby było jednocześnie:

$$(-1)^{k+n+1}A_{k,n+1}=C_k,\ (k=2,3,\ldots n+1)$$

co jest możliwe; gdyż na wyznaczenie $a_{11}, a_{12},\ldots a_{1n}$ mieć będziemy n równań linjowych, których wyznacznik okazuje się równy $C^{n-1}\neq 0$.

ze względu na to, że wyznacznik $|a_{is}| \neq 0$, (ponieważ wyznacznik podstawienia (28) jest różny od 0) da nam

$$a_i = 0 \text{ dla } i = 1, 2, \ldots n;$$

będzie prócz tego $b = e^{\varphi i}$, co wynika z wzoru (22); podstawienia, nie zmieniające hyperpłaszczyzny $x_{n+1} = 0$, będą więc typu (29).

Przyjąć możemy $b = 1$; ponieważ, w przeciwnym razie, napisalibyśmy w podstawieniach grupy $\overline{G}$ zamiast wszystkich x' ich iloczyny przez $e^{\varphi i}$, przez co nie zmieniłyby się stosunki $y_k = x_k : x_{n+1}$, wchodzące w grupę G; zależności (22), (23), (24), (25) pozostałyby też bez zmiany.

W przypadku drugim mamy

Twierdzenie VII: *Każda podgrupa γ grupy hyperfuchsowskiej G, nie zmieniająca dowolnie danego punktu, leżącego zewnątrz powierzchni H, lub też nie zmieniająca dowolnie danej hyperpłaszczyzny, przecinającej powierzchnię H, da się po odpowiedniem dobraniu pewnego podstawienia Q grupy hyperfuchsowskiej, przedstawić, jako grupa podobna do grupy $Q^{-1}\gamma Q$ utworzonej z podstawień postaci*

$$(31) \qquad \begin{vmatrix} 1, & 0, \ldots & 0, & 0 \\ 0, & a_{22}, \ldots & a_{2n}, & a_2 \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ 0, & a_{n2}, \ldots & a_{nn}, & a_n \\ 0, & b_2, \ldots & b_n, & b \end{vmatrix}$$

gdzie

$$\sum_{i=2}^{n} a_i a_i^0 - bb^0 = 1, \quad \sum_{i=2}^{n} a_{is} a_{ir}^0 - b_s b_r^0 = 0, \quad s \neq r = 2, 3, \ldots n$$

$$\sum_{i=2}^{n} a_{is} a_{is}^0 - b_s b_s^0 = 1, \quad \sum_{i=2}^{n} a_{is} a_i^0 - b_s b^0 = 0, \quad s = 2, 3, \ldots n.$$

Opierając się na przechodniości grupy $\overline{G}$ w obszarze $H > 0$, obierzemy za $\overline{Q}$ jedno z podstawień grupy $\overline{G}$, przekształcających punkt dany $(c_1, c_2, \ldots c_{n+1})$ na punkt o spółrzędnych:

$$x_1 = 1, \; x_2 = 0, \ldots \; x_n = 0, \; x_{n+1} = 0,$$

dla którego $H > 0$. Wyznaczając teraz podstawienia grupy hyperfuchsowskiej, nie zmieniające punktu $(1, 0, \ldots 0, 0)$, otrzymamy najpierw oczywiste warunki:

(32) $$a_{21} = a_{31} = \dots = a_{n1} = 0, \ b_1 = 0;$$

z wzoru zaś (23) przy $s = 1$:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{i1} a_{i1}^0 - b_1 b_1^0 = 1$$

mieć będziemy:

$$a_{11} a_{11}^0 = 1, \text{ skąd } a_{11} = e^{\psi i}.$$

Dalej z zależności (24) i (25) przy $s = 1$, $r = 2, 3, \dots n$ mieć będziemy (ponieważ $b_1 = 0$):

$$\sum_{i=1}^{n} a_{i1} a_{ir}^0 = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} a_{i1} a_i^0 = 0,$$

skąd, ze względu na (32), otrzymamy:

$$a_{11} a_{1r}^0 = 0, \quad a_{11} a_1^0 = 0, \quad (r = 2, 3, \dots n),$$

albo ($a_{11} \neq 0$)

$$a_{12} = a_{13} = \dots = a_{1n} = 0, \quad a_1 = 0.$$

Podstawienia szukane będą postaci (31), gdyż, podobnie, jak w tw. VI, możemy zakładać, że $e^{\psi i} = 1$.

Biorąc dalej (przy odpowiednim wyborze Q) za hyperpłaszczyznę, przecinającą H, hyperpłaszczyznę $x_1 = 0$, znajdziemy dla podstawień, nie zmieniających hyperpłaszczyzny $x_1 = 0$, najwpierw warunki:

(33) $$a_{12} = a_{13} = \dots = a_{1n} = 0, \ a_1 = 0.$$

Z wzorów zaś (25) przy $s = 1$ i wzoru (24) przy $s = 1$, $r = 2, 3, \dots n$ otrzymamy układ n równań jednorodnych (od $i = 2$, ponieważ przy $i = 1$, $a_1 = 0$):

$$\sum_{i=2}^{n} a_{i1}^0 a_i - b_1^0 b = 0,$$

$$\sum_{i=2}^{n} a_{i1}^0 a_{ir} - b_1^0 b_r = 0$$

na spółczynniki: $a_{21}^0, a_{31}^0, \dots a_{n1}^0, b_1^0$, których wyznacznik, ze względu na (33), jest różny od zera; będzie przeto: $a_{21} = a_{31} = \dots = a_{n1} = 0$, $b_1 = 0$.

Przechodząc do przypadku, kiedy punkt $(c_1, c_2, \dots c_{n+1})$ leży na powierzchni H, mieć będziemy

Twierdzenie VIII: *Podgrupa γ grupy hyperfuchsowskiej G, będąca zbiorem podstawień, nie zmieniających dowolnie danego punktu, leżącego na powierzchni H, lub też dowolnie danej hyperpłaszczyzny, stycznej do H, jest podobną do grupy, utworzonej z podstawień*

$$x'_k = \sum_{l=1}^{n-1} a_{kl} x_l + a_k (x_n - x_{n+1}),$$

$$x'_n - x'_{n+1} = (a-b)(x_n - x_{n+1}), \quad k = 1, 2, \dots n-1$$

$$x'_{n+1} = \sum_{l=1}^{n-1} b_l x_l + b(x_n - x_{n+1}) + \theta x_{n+1},$$

w których

$$\theta^0 (a - b) = 1,$$

i prócz tego

$$(34) \qquad \sum_{l=1}^{n-1} a_{ls} a^0_{ls} = 1, \quad \sum_{l=1}^{n-1} a_{ls} a^0_{lr} = 0, \quad s \neq r = 1, 2, \dots n-1$$

$$(35) \qquad \sum_{l=1}^{n-1} a_l a^0_l + a a^0 - b b^0 = 1, \quad \sum_{l=1}^{n-1} a_l a^0_{lr} + b^0_r (a - b) = 0.$$

W samej rzeczy, opierając się na przechodniości grupy G w obszarze $H = 0$, obierzemy za $\overline{Q}$ jedno z podstawień grupy $\overline{G}$, przekształcających punkt $(c_1, c_2, \dots c_{n+1})$ na punkt o spółrzędnych:

$$x_1 = 0, \; x_2 = 0, \dots \; x_n = 1, \; x_{n+1} = 1,$$

leżący na powierzchni. Szukając teraz podstawień grupy $Q^{-1} \gamma Q$, wyznaczymy podstawienia

$$\left| \begin{array}{ccc} a_{11}, \dots & a_{1n}, & a_1 \\ \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot \\ \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot \\ a_{n1}, \dots & a_{nn}, & a_n \\ b_1, \dots & b_n, & b \end{array} \right|,$$

nie zmieniające punktu $(0, 0, \dots 1, 1)$; otrzymamy najpierw warunki:

$$a_{in} = -a_i, \; \theta = a_{nn} + a_n, \; \theta = b_n + b, \; (i = 1, 2, \dots n-1)$$

gdzie θ jest pewnym spółczynnikiem.

Lecz z wzoru (22) mamy (gdyż $a_i = -a_{in}$):

$$\sum_{i=1}^{n-1} a_{in} a_{in}^0 + (\theta - a_{nn})(\theta^0 - a_{nn}^0) - (\theta - b_n)(\theta^0 - b_n^0) = -1,$$

wzór zaś (25) przy $s = n$ daje

$$-\sum_{i=1}^{n-1} a_{in} a_{in}^0 + a_{nn}(\theta^0 - a_{nn}^0) - b_n(\theta^0 - b_n^0) = 0;$$

dodając te równości, otrzymamy:

$$\theta(\theta^0 - a_{nn}^0) - \theta(\theta^0 - b_n^0) = -1, \text{ skąd } \theta(a_{nn}^0 - b_n^0) = 1.$$

Dalej z wzorów (24) przy $r = n$, $s = 1, 2, \ldots n-1$ i wzorów (25) przy $s = 1, 2, \ldots n-1$ mamy odpowiednio ($a_i = -a_{in}$ dla $i = 1, 2, \ldots n-1$):

$$\sum_{i=1}^{n-1} a_{is} a_{in}^0 + a_{ns} a_{nn}^0 - b_s b_n^0 = 0,$$

$$-\sum_{i=1}^{n-1} a_{is} a_{in}^0 + a_{ns}(\theta^0 - a_{nn}^0) - b_s(\theta^0 - b_n^0) = 0,$$

skąd, dodając, mamy:

$$\theta^0(a_{ns} - b_s) = 0, \quad s = 1, 2, \ldots n-1,$$

czyli otrzymujemy zależności:

$$a_{ns} = b_s, \quad s = 1, 2, \ldots n-1.$$

Jeżeli położymy jeszcze $a_{nn} = a$, $b_n = b$, to szukane podstawienia będą miały postać:

$$(36) \qquad \left|\begin{array}{llll} a_{11}, \ldots & a_{1n-1}, & a_1, & -a_1 \\ . \quad . \quad . & . \quad . \quad . & . \quad . & . \quad . \\ a_{n-1,1} \ldots & a_{n-1,n-1}, & a_{n-1}, & -a_{n-1} \\ b_1, \ldots & b_{n-1}, & a, & \theta - a \\ b_1, \ldots & b_{n-1}, & b, & \theta - b \end{array}\right|, \quad \theta^0(a - b) = 1,$$

gdzie spółczynniki podstawienia spełniają zależności (34) i (35).

Obierając za hyperpłaszczyznę styczną do powierzchni H, hyperpłaszczyznę $x_n - x_{n+1} = 0$, i szukając podstawień, nie zmieniających tej hyperpłaszczyzny, otrzymamy najwpierw:

$$(37) \qquad a_{ns} = b_s, \; a_{nn} - b_n = \theta', \; a_n - b = -\theta', \; (s = 1, 2, \ldots n-1)$$

gdzie θ' jest pewnym spółczynnikiem; po dodaniu zaś zależności (24) przy $r = n$ do zależności (25), otrzymamy, po uwzględnieniu zależności (37), równania:

$$\sum_{i=1}^{n-1} a_{is}(a_i^0 + a_{in}^0) = 0, \quad s = 1, 2, \ldots n-1$$

w liczbie $n-1$ na wyznaczenie $a_i^0 + a_{in}^0$. Wyznacznik[1]) $|a_{ik}|$ tych równań jest różny od zera, przeto

$$a_i + a_{in} = 0;\ i = 1, 2, \ldots n-1;$$

otrzymane w ten sposób podstawienia będą postaci (36).

Rozpatrzyliśmy w ten sposób wszystkie przypadki grup hyperfuchsowskich, nie zmieniających danej hyperpłaszczyzny.

Wracając obecnie do przypadku, kiedy grupa hyperfuchsowska G_f (str. 11) jest zbiorem podstawień, nie zmieniających danej hyperpłaszczyzny S_{n-1}, będziemy mogli udowodnić następujące twierdzenie, będące uzupełnieniem twierdzenia III, mianowicie,

Twierdzenie IX: *Jeżeli grupa hyperfuchsowska G_f zmiennych $y_1, y_2, \ldots y_n$ jest zbiorem podstawień, pozostawiających bez zmiany daną hyperpłaszczyznę S_{n-1} przestrzeni urojonej $(y_1, y_2, \ldots y_n)$, styczną do powierzchni $H = 0$, to przy istnieniu n zależności algebraicznych*

$$R_i(F_i, f_1, f_2, \ldots f_n) = 0$$

między n linjowo niezależnemi funkcjami $f_1, f_2, \ldots f_n$, należącemi do grupy G_f i n linjowo niezależnemi funkcjami $F_1, F_2, \ldots F_n$, należącemi do grupy G_F zmiennych $Y_1, Y_2, \ldots Y_n$, zależności algebraiczne

$$\varphi_k(Y_1, Y_2, \ldots Y_n, y_1, y_2, \ldots y_n) = 0$$

mogą nie być linjowemi względem $Y_1, Y_2, \ldots Y_n$; jeżeli zaś grupa G_f jest zbiorem podstawień, pozostawiających bez zmiany daną hyperpłaszczyznę S_{n-1} nie styczną do powierzchni $H = 0$, to grupa G_f może być przekształcona na grupę podobną, w której liczba zmiennych może być zredukowaną do liczby mniejszej, niż n.

W samej rzeczy, jeżeli dana hyperpłaszczyzna S_{n-1} nie przecina powierzchni H, to, zgodnie z twierdzeniem VI, podstawienia V, nie zmieniające S_{n-1}, tworzą grupę $\overline{G}$, podobną do grupy podstawień:

---

[1]) Wystarczy napisać iloczyn $|a_{ik}| \cdot |a_{ik}^0|$, uwzględniając zależności $\sum a_{is} a_{is}^0 = 1$, $\sum a_{is} a_{ir}^0 = 0$; znajdziemy, że moduł wyznacznika $|a_{ik}|$ jest równy 1.

$$\overline{V}=\begin{vmatrix} a_{11},\dots & a_{1n}, & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1},\dots & a_{nn}, & 0 \\ 0,\dots & 0, & 1 \end{vmatrix};$$

kładąc więc

$$\xi_i = x_i : x_{n+1}, \quad i = 1, 2, \dots n$$

otrzymamy grupę podstawień:

$$(\xi'_1, \xi'_2, \dots \xi'_n) = \overline{V}(\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n)$$

n zmiennych $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n$, przekształcającą formę Hermitea

$$\xi_1\xi_1^0 + \xi_2\xi_2^0 + \dots + \xi_n\xi_n^0$$

samą na siebie; grupa hyperfuchsowska G byłaby podobną do grupy, zawierającej $n-1$ zmiennych. Biorąc zaś grupę podobną $Q^{-1}GQ$ zamiast grupy G, zamieniamy funkcję $f(y)$ na $f(Qy)$, co niema istotnego znaczenia.

Jeżeli zaś dana hyperpłaszczyzna S_{n-1} przecina powierzchnię H, to, zgodnie z twierdzeniem VII, podstawienia, nie zmieniające hyperpłaszczyzny S_{n-1}, tworzą grupę $\overline{G}$, podobną do grupy podstawień:

$$\overline{V}=\begin{vmatrix} 1, & 0,\dots & 0, & 0 \\ 0, & a_{22},\dots & a_{2n}, & a_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0, & a_{n2},\dots & a_{nn}, & a_n \\ 0, & b_2,\dots & b_n, & b \end{vmatrix};$$

kładąc tutaj

$$\xi_i = x_{i+1} : x_1, \quad i = 1, 2, \dots n$$

otrzymamy znowu grupę podstawień n zmiennych $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n$, przekształcającą formę Hermitea

$$\sum_{i=1}^{n-1} \xi_i\xi_i^0 - \xi_n\xi_n^0$$

samą na siebie. Liczba więc zmiennych w grupie hyperfuchsowskiej redukowałaby się i w tym przypadku do $n-1$.

Jeżeli dana hyperpłaszczyzna S_{n-1} jest styczną do powierzchni H i pozostaje bez zmiany przy podstawieniach grupy G_f, to podstawienia grupy G'_f (str. 11) pozostawią również tę hyperpłaszczyznę bez zmiany. Zależności

$$\varphi_k(Y_1, Y_2, \ldots Y_n, y_1, y_2, \ldots y_n) = 0$$

mogą wtedy nie być linjowemi; lecz hyperpłaszczyzna S_{n-1} musi wtedy być jedynym zbiorem punktów rozgałęzienia funkcyj algebraicznych $Y_1, Y_2, \ldots Y_n$.

§ 5. Własności grup G i Γ.

Zakładając, że grupa hyperfuchsowska G nie jest zbiorem podstawień, pozostawiających bez zmiany daną hyperpłaszczyznę, i przechodząc do zadania o przekształceniu funkcyj hyperfuchsowskich, mamy wyznaczyć grupę ciągłą Γ podstawień linjowych

$$(Y_1, Y_2, \ldots Y_n) = B(y_1, y_2, \ldots y_n)$$

oraz grupę hyperfuchsowską G tak, aby między n funkcjami niezależnemi $f_1, f_2, \ldots f_n$, należącemi do grupy G i n funkcjami przekształconemi

$$f_i(By), i = 1, 2, \ldots n$$

zachodziło n zależności algebraicznych. Rozpatrzymy, jakie własności powinny posiadać grupy Γ i G. Mamy

Twierdzenie X: *Jeżeli B jest podstawieniem grupy ciągłej Γ, a g oznacza podgrupę o wskaźniku skończonym grup G i $B^{-1} G B$, to każde podstawienie B grupy Γ musi być przemienne z każdem podstawieniem V grupy g i musi przeto pozostawiać bez zmiany powierzchnię H.*

Dla dowodu zauważymy przedewszystkiem, że podgrupy grupy nieciągłej G o wskaźniku skończonym tworzą zbiór przeliczalny. Jeżeli przeto podstawienie B, zmieniając się w sposób ciągły w zbiorze podstawień grupy Γ, przebiegać będzie wszystkie podstawienia grupy ciągłej Γ, to podgrupa g, mająca postać

$$1, B^{-1} V_2 B, B^{-1} V_3 B, \ldots$$

będzie musiała pozostawać bez zmiany, gdyż inaczej podgrupy grupy G o wskaźniku skończonym musiałyby utworzyć zbiór nieprzeliczalny. Jeżeli dalej B, zmieniając się w sposób ciągły w zbiorze podstawień grupy Γ, przyjmie wartość $B = 1$, to grupa g będzie miała postać:

$$1, V_2, V_3, \ldots$$

i będzie:

$$B^{-1} V_i B = V_j.$$

Lecz spostrzeżemy również łatwo, że musi być stale $i = j$; ponieważ, gdyby podstawienia B grupy ciągłej Γ przekształcały V_i na V_j, to podobnie, jak poprzednio, przy zmienianiu się B w sposób ciągły *w zbiorze podstawień grupy Γ, musiałoby i podstawienie V_j zmieniać się w sposób ciągły* (o ile by nie zostawało bez zmiany), co jest niemożliwe, gdyż V_j są podstawieniami grupy nieciągłej G. Musi przeto V_j zostawać bez zmiany przy zmienianiu się B; przy $B = 1$ otrzymujemy $V_i = V_j$, jest przeto stale:

$$B^{-1} V_i B = V_i,$$

co dowodzi twierdzenia. Podstawienie $\bar{B}$ należy do podstawień, nie zmieniających formy Hermitea $\sum_{i=1}^{n} x_i x_i^0 - x_{n+1} x_{n+1}^0$.

Wiadomem jest dalej [1]), że, jeżeli dla podstawienia

$$(38) \qquad x_i' = \sum_{K=1}^{n+1} a_{iK} x_K, \quad i = 1, 2, \ldots n+1$$

równanie

$$D(\varrho) = |a_{iK} - \varrho_{iK}| = 0, \ \varrho_{ii} = \varrho, \ \varrho_{iK} = 0, \ i \neq K = 1, 2, \ldots n+1$$

ma m pierwiastków różnych:

$$\varrho', \varrho'', \ldots \varrho^{(m)}, \ (m \leqq n+1),$$

i $n - h^{(j)} + 1$ jest rzędem macierzy wyznacznika $D(\varrho^{(j)})$ przy $j = 1, 2, \ldots m$, to podstawienie (38) posiada m *przestrzeni zasadniczych*:

$$S_{h'-1}, S_{h''-1}, \ldots S_{h^{(m)}-1}$$

o $h'-1, h''-1, \ldots h^{(m)}-1$ wymiarach, pozostających bez zmiany przy podstawieniach (38).

Mamy następujące:

Twierdzenie XI: *Jeżeli jakiekolwiek podstawienie $\bar{V}$ grupy g posiada przestrzenie zasadnicze o jednakowej liczbie p wymiarów, to każde podstawienie $\bar{B}$ grupy ciągłej $\bar{\Gamma}$ przekształca jedną przestrzeń na drugą.*

W samej rzeczy, zwrócimy uwagę na jedną z tych przestrzeni S_p; niech będzie $\bar{B}(S_p) = S_p'$, gdzie S_p' jest pewną przestrzenią

---

[1]) Bertini: Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi, p. 64.

o p wymiarach; okażemy, że S'_p jest przestrzenią zasadniczą podstawienia $\overline{V}$, t. j. $\overline{V}(S'_p) = S'_p$. Zakładając, że

$$\overline{V}(S'_p) = S''_p \neq S'_p,$$

mielibyśmy, na mocy zależności $\overline{V} = \overline{B}^{-1}\,\overline{V}\,\overline{B}$, następujące równości:

$$\overline{V}(S_p) = S_p = \overline{B}^{-1}\,\overline{V}\,\overline{B}(S_p) = \overline{B}^{-1}\,\overline{V}(S'_p) = \overline{B}^{-1}(S''_p),$$

czyli $\overline{B}^{-1}(S''_p) = S_p$, skąd $S''_p = \overline{B}(S_p)$, co, ze względu na równość $\overline{B}(S_p) = S'_p$, dawałoby: $S''_p = S'_p$, t. j. $\overline{V}(S'_p) = S'_p$; jest więc S'_p przestrzenią zasadniczą podstawienia $\overline{V}$.

Zwrócimy teraz uwagę na zbiór wszystkich przestrzeni zasadniczych o p wymiarach, należących do podstawień grupy $\overline{g}$, i oznaczymy zbiór ten przez E_p $(p = 0, 1, 2, \ldots n-1)$.

Mieć będziemy

Twierdzenie XII: *Każda z przestrzeni p-wymiarowych zbioru E_p, należącego do grupy $\overline{g}$, pozostaje bez zmiany przy zastosowaniu do niej dowolnego podstawienia $\overline{B}$ grupy ciągłej Γ.*

Zauważymy najpierw, że ze względu na to, że grupa $\overline{g}$ jest nieciągłą, zbiór E_p będzie zbiorem przeliczalnym, i że, na podstawie twierdzenia XI, każde podstawienie $\overline{B}$ będzie zamieniało przestrzenie zbioru E_p na przestrzenie, należące do tego samego zbioru.

Jeżeli przeto jakakolwiek z przestrzeni S_p, wyznaczona równaniami:

$$x_i = \lambda^{(1)} x_i^{(1)} + \lambda^{(2)} x_i^{(2)} + \ldots + \lambda^{(p+1)} x_i^{(p+1)}, \quad (i = 1, 2, \ldots n+1)$$

nie pozostawałaby bez zmiany przy zastosowaniu do niej podstawienia $\overline{B}$, to mielibyśmy zbiór ciągły przestrzeni, wyznaczonych równaniami:

$$\overline{B}(x_i) = \lambda^{(1)} x_i^{(1)} + \lambda^{(2)} x_i^{(2)} + \ldots + \lambda^{(p+1)} x_i^{(p+1)}$$

będących przekształceniami przestrzeni S_p; każda z tych przestrzeni, na podstawie twierdzenia XI, należeć by musiała do zbioru E_p; lecz to jest niemożliwe, ponieważ zbiór tych przestrzeni jest ciągły, a zbiór E_p przeliczalny. Musi przeto być:

$$\overline{B}(S_p) = S_p,$$

czyli każde podstawienie B grupy Γ pozostawia bez zmiany wszystkie przestrzenie zbioru E_p.

Jako rezultat, mamy, że podstawienia $\overline{B}$ grupy ciągłej Γ posiadać winny następujące własności:

1) jest $\overline{B}^{-1}\overline{V}\overline{B}=\overline{V}$ dla każdego podstawienia $\overline{V}$ podgrupy $\overline{g}$ grup $\overline{G}$ i $\overline{B}^{-1}\overline{G}\overline{B}$ i dla każdego podstawienia $\overline{B}$ grupy $\overline{\Gamma}$,

2) każde podstawienie $\overline{B}$ pozostawia bez zmiany każdą przestrzeń zbioru E_p grupy $\overline{g}$,

3) $\overline{B}$ należy do podstawień, nie zmieniających formy Hermitea $\Sigma x_i x_i^0 - x_{n+1}x_{n+1}^0$.

§ 6. Możliwe przypadki grup G.

Mamy natychmiast wniosek następujący: ażeby każde podstawienie $\overline{B}$ grupy ciągłej $\overline{\Gamma}$ mogło pozostawiać bez zmiany każdą przestrzeń zbioru E_p, zbiór E_p grupy $\overline{g}$ będzie mógł zawierać: 1) albo skończoną liczbę przestrzeni $S_p', S_p'', \ldots S_p^{(m)}$, 2) albo nieskończoną liczbę przestrzeni, leżących w skończonej liczbie przestrzeni E_{p+q}, gdzie $q \geqslant 1$.

Przekonamy się jednak z łatwością, że *można ograniczyć się do rozpatrzenia grup $\overline{g}$, posiadających tę własność, że wszystkie ich podstawienia $\overline{V}$ pozostawiają bez zmiany pewną określoną przestrzeń S_p*.

W samej rzeczy, jeżeli zbiór E_p grupy $\overline{g}$ zawiera skończoną liczbę m przestrzeni:

(39) $$S_p', S_p'', \ldots S_p^{(m)},$$

to przy podstawieniach grupy

$$\overline{g}(1, \overline{V}_2, \overline{V}_3, \ldots)$$

przestrzenie te będą mogły tylko doznawać permutacji; ponieważ, gdyby, np. podstawienie $\overline{V}_i$ po zastosowaniu do przestrzeni S_p' dałoby przestrzeń $\overline{V}_i(S_p') = S_p$, nie należącą do zbioru E_p, to podstawienie $\overline{V}_i\overline{V}_j\overline{V}_i^{-1}$, w którem $\overline{V}_j$ pozostawia S_p' bez zmiany, dawałoby

$$\overline{V}_i\overline{V}_j\overline{V}_i^{-1}(S_p) = S_p,$$

i zatem przestrzeń S_p byłaby w zbiorze E_p.

Jeżeli więc przestrzenie (39) doznają tylko permutacji przy podstawieniach grupy $\overline{g}$, to w grupie $\overline{g}$ istnieć będzie podgrupa $\overline{g}_0$ o wskaźniku skończonym, której każde podstawienie pozostawiać będzie bez zmiany wszystkie przestrzenie zbioru E_p; a ponieważ funkcje, należące do grupy hyperfuchsowskiej g_0, będą algebraicznie związane (jako należące do podgrupy g_0 grupy g o wskaźniku skończonym) z funkcjami, należącemi do grupy g, więc można będzie ograniczyć się w tym przypadku do grup g_0, których *każde* podstawienie pozostawia bez zmiany wszystkie przestrzenie zbioru E_p.

Jeżeli zaś zbiór E_p zawiera nieskończoną liczbę przestrzeni S_p. leżących w pewnej przestrzeni S_{p+q}, która należy do zbioru skończonego E_{p+q}, to podobnie, jak poprzednio, możemy w tym przypadku ograniczyć się również do grup g_0, których *każde* podstawienie nie zmienia pewnej przestrzeni S_{p+q}.

Rozpatrzyliśmy już (§ 4) zbiory podstawień, nie zmieniających przestrzeni S_0 i S_{n-1}.

Łatwo się przekonamy, że *w przypadku przestrzeni S_0 i S_{n-1} można będzie ograniczyć się do S_0, leżących na powierzchni H i do S_{n-1} stycznych do powierzchni H.*

W samej rzeczy, jeżeli dany punkt S_0 spełnia warunek $H < 0$, lub też dana hyperpłaszczyzna S_{n-1} nie przecina powierzchni H, to, jak okazaliśmy poprzednio (str. 23), liczba zmiennych w grupie hyperfuchsowskiej g, po użyciu podstawienia

$$\xi_i = x_i : x_{n+1}, \quad i = 1, 2, \ldots n$$

mogłaby być zredukowaną do liczby $n - 1$.

Podobnie, jeżeli dla danego punktu S_0 jest $H > 0$, lub też dana hyperpłaszczyzna S_{n-1} przecina powierzchnię H, to widzieliśmy (str. 23), że używając podstawienia

$$\xi_i = x_{i+1} : x_1, \quad i = 1, 2, \ldots n$$

można liczbę zmiennych w grupie hyperfuchsowskiej g zredukować i w tym przypadku do $n - 1$.

Pozostają do rozpatrzenia tylko przypadki S_0, leżących na powierzchni H, i hyperłaszczyzn S_{n-1} stycznych do H, t. j. przypadki grup hyperfuchsowskich, utworzonych z podstawień:

$$x'_k = \sum_{i=1}^{n-1} a_{ki} x_i + a_k (x_n - x_{n+1}),$$

$$x'_n - x'_{n+1} = (a - b), (x_n - x_{n+1}), \quad k = 1, 2, \ldots n - 1$$

$$x'_{n+1} = \sum_{i=1}^{n-1} b_i x_i + b (x_n - x_{n+1}) + \theta x_{n+1},$$

w których

$$\theta^0 (a - b) = 1,$$

i prócz tego

$$\sum_{i=1}^{n-1} a_{is} a^0_{is} = 1, \quad \sum_{i=1}^{n-1} a_{is} a^0_{ir} = 0, \quad s \neq r = 1, 2, \ldots n - 1$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} a_i a^0_i + a a^0 - b b^0 = 1, \quad \sum_{i=1}^{n-1} a_i a^0_{ir} + b^0_r (a - b) = 0.$$

Łatwo się przekonamy, że *na tej samej podstawie można będzie w dalszem nie brać pod uwagę grup* $\bar{g}$, *których podstawienia pozostawiają bez zmiany przestrzenie* S_p *o liczbie* p *wymiarów różnej od* 0 *i* $n-1$.

W samej rzeczy, mogą zajść trzy przypadki:

1) przestrzeń S_p nie ma punktu wspólnego z powierzchnią H,

2) przestrzeń S_p przecina powierzchnię H wzdłuż H_{p-1},

3) przestrzeń S_p dotyka powierzchni H w pewnym punkcie S_0 (przestrzeń S_p nie może dotykać powierzchni H na przestrzeni S_q innej, niż S_0, ponieważ powierzchnia $2n$-wymiarowa $\sum_{\kappa=1}^{n}(y_\kappa'^2 + y_\kappa''^2) = 1$ nie zawiera przestrzeni różnych od S_0).

Rozpatrzymy kolejno te trzy przypadki.

Niech w pierwszym przypadku przestrzeń S_p będzie określona $n-p$ równaniami linjowemi:

(39) $$U_1 = 0, \; U_2 = 0, \; U_{n-p} = 0$$

względem $x_1, x_2, \ldots x_{n+1}$; można będzie znaleźć podstawienie $\bar{Q}$, przekształcające pierwsze z równań (39) na $x_{n+1} = 0$ (str. 17), a temsamem przestrzeń S_p na pewną przestrzeń, określoną równaniami

(40) $$x_{n+1} = 0, \; U_2' = 0, \ldots . \; U_{n-p}' = 0.$$

Grupa, nie zmieniająca przestrzeni (40), będzie wtedy grupą $\bar{Q}\,\bar{g}\,\bar{Q}^{-1}$, podobną do grupy $\bar{g}$; lecz liczba zmiennych grupy hyperfuchsowskiej $Q\,g\,Q^{-1}$ będzie wtedy mogła (na podstawie poprzedniego) być zredukowaną do liczby mniejszej, niż n.

W przypadku drugim można będzie układ równań, wyznaczających przestrzeń S_p, grupy $\bar{g}$, przekształcić przy pomocy odpowiedniego podstawienia $\bar{Q}$ na układ:

$$x_i = 0, \; U_2^{(2)} = 0, \ldots . \; U_{n-p}^{(2)} = 0,$$

gdzie i jest jedną z liczb $1, 2, \ldots n$. Liczba zmiennych grupy hyperfuchsowskiej $Q\,g\,Q^{-1}$ będzie mogła być zredukowaną do liczby mniejszej, niż n.

W przypadku trzecim będzie przynajmniej jedno z równań (39) równaniem hyperpłaszczyzny, przecinającej powierzchnię H; wtedy, wyznaczając podstawienie $\bar{Q}$, przekształcające tę hyperpłaszczyznę na hyperpłaszczyznę $x_i = 0$ (przy dowolnie obranem i spośród liczb $1, 2, \ldots n$), mieć będziemy grupę podobną $Q\,g\,Q^{-1}$ o liczbie zmiennych mniejszej niż n.

Zestawiając otrzymane wyniki, mamy:

Twierdzenie XIII: *Przypadki, w których liczba n zmiennych $y_1, y_2, \ldots y_n$ w grupie hyperfuchsowskiej g nie może być zredukowaną do liczby mniejszej, niż n, znajdują się między tymi przypadkami, w których każde podstawienie grupy $\bar{g}$ albo pozostawia bez zmiany punkty, leżące na powierzchni H, albo pozostawia bez zmiany hyperpłaszczyzny styczne do powierzchni H.*

Podstawienia, należące do grupy $\bar{g}$, muszą być przeto postaci:

$$
(41) \qquad \begin{vmatrix} a_{11}, \ldots & a_{1,n-1}, & a_1, & -a_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n-1,1}, \ldots & a_{n-1,n-1}, & a_{n-1}, & -a_{n-1} \\ b_1, \ldots & b_{n-1}, & a, & \theta - a \\ b_1, \ldots & b_{n-1}, & b, & \theta - b \end{vmatrix},
$$

gdzie

$$\theta^0 (a - b) = 1$$

i prócz tego

$$
(42) \qquad \sum_{i=1}^{n-1} a_{is} a_{is}^0 = 1, \quad \sum_{n-1}^{n-1} a_{is} a_{ir}^0 = 0, \quad s \neq r = 1, 2, \ldots n-1
$$

$$
(43) \qquad \sum_{i=1}^{n-1} a_i a_i^0 + a a^0 - b b^0 = 1, \quad \sum_{i=1}^{n-1} a_i a_{ir}^0 + b_r^0 (a - b) = 0.
$$

§ 7. Wyznaczenie grup G i Γ.

W wyniku poprzednich rozważań pozostaje nam wyznaczyć grupy nieciągłe $\bar{g}$ podstawień postaci (41) i grupy ciągłe $\bar{\Gamma}$ podstawień postaci (41), posiadające własności:

1) każde podstawienie $\bar{V}$ grupy $\bar{g}$ pozostawia bez zmiany każdy element zbioru E_0 lub też zbioru E_{n-1}, przyczem E_0 jest zbiorem punktów stałych grupy $\bar{g}$, leżących na powierzchni H, a E_{n-1} jest zbiorem hyperpłaszczyzn stałych grupy $\bar{g}$ stycznych do powierzchni H,

2) każde podstawienie B grupy ciągłej Γ pozostawia bez zmiany każdy element zbiorów E_0 i E_{n-1},

3) każde podstawienie $\bar{B}$ grupy ciągłej $\bar{\Gamma}$ jest przemienne z każdem podstawieniem $\bar{V}$ grupy $\bar{g}$, t. j. $\bar{B}\bar{V} = \bar{V}\bar{B}$.

Mogą przedstawić się dwa następujące przypadki:

I. Zbiór E_0 grupy $\bar{g}$ zawiera conajwyżej jeden punkt, leżący na powierzchni H; ponieważ, gdyby zbiór ten zawierał 2 punkty leżące na powierzchni H i pozostające bez zmiany (ponieważ każde

podstawienie grupy $\bar{g}$ pozostawia bez zmiany wszystkie elementy zbioru E_0) przy wszystkich podstawieniach grupy $\bar{g}$, to punkty te wyznaczałyby pewną prostą S_1, pozostającą bez zmiany przy podstawieniach grupy $\bar{g}$; wtedy liczba zmiennych (str. 29) grupy $\bar{g}$ mogłaby być zredukowaną do liczby mniejszej, niż n. Za punkt zbioru E_0 przyjmiemy punkt $(0, 0, \ldots 1, 1)$. Zbiór E_{n-1} zawiera conajwyżej jedną hyperpłaszczyznę styczną do powierzchni H, ponieważ gdyby on zawierał dwie hyperpłaszczyzny styczne do H i pozostające bez zmiany przy wszystkich podstawieniach grupy $\bar{g}$, to hyperpłaszczyzny te wyznaczałyby pewną rozmaitość S_{n-2}, nie zmieniającą się przy podstawieniach grupy $\bar{g}$; lecz liczba zmiennych grupy $\bar{g}$ mogłaby wtedy być również zredukowaną. Za hyperpłaszczyznę zbioru E_{n-1} przyjmiemy $x_n - x_{n+1} = 0$. Każde podstawienie grupy $\bar{g}$ pozostawia przeto bez zmiany: 1) albo tylko punkt $(0, 0, \ldots 1, 1)$. 2) albo tylko hyperpłaszczyznę $x_n - x_{n+1} = 0$, 3) albo i punkt $(0, 0, \ldots 1, 1)$, i hyperpłaszczyznę $x_n - x_{n+1} = 0$, nie zawierając pozatem żadnych innych punktów stałych, ani hyperpłaszczyzn stałych.

II. Grupa $\bar{g}$ zawiera nieskończoną liczbę punktów stałych (gdyby zawierała skończoną liczbę punktów stałych, to zamiast niej (str. 27) mogłaby być wzięta grupa, której *każde* podstawienie nie zmienia tych punktów, lecz wtedy w takiej grupie liczba zmiennych mogłaby być zredukowaną), nie leżących na powierzchni H, lecz leżących na pewnej hyperpłaszczyźnie [1]) S_{n-1}, która, pozostając bez zmiany przy podstawieniach grupy $\bar{g}$, musi być styczną do powierzchni H, ponieważ, gdyby była nie styczną i zostawała bez zmiany, to liczba zmiennych w grupie $\bar{g}$ mogłaby być zredukowaną; za tę hyperpłaszczyznę przyjmiemy $x_n - x_{n+1} = 0$. Każde podstawienie grupy $\bar{g}$ pozostawia bez zmiany punkt $(0, 0, \ldots 1, 1)$ i hyperpłaszczyznę $x_n - x_{n+1} = 0$.

Przechodząc do przypadku I, mamy wyznaczyć grupę $\bar{g}$ podstawień postaci:

$$(44) \qquad \begin{vmatrix} A_{11}, \ldots & A_{1,n-1}, & A_1, & -A_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{n-1,1}, \ldots & A_{n-1,n-1}, & A_{n-1}, & -A_{n-1} \\ B_1, \ldots & B_{n-1}, & A, & \theta - A \\ B_1, \ldots & B_{n-1}, & B, & \theta - B \end{vmatrix}, \qquad \theta^0(A-B) = 1,$$

---

[1]) nie mogą leżeć w przestrzeni S_q $(q < n-1)$, gdyż wtedy liczba zmiennych grupy mogłaby być zredukowaną.

której każde podstawienie pozostawia bez zmiany: 1) albo punkt $(0, 0, \dots 1, 1)$, i hyperpłaszczyznę $x_n - x_{n+1} = 0$, 2) albo tylko jeden punkt $(0, 0, \dots 1, 1)$, 3) albo tylko samą hyperpłaszczyznę $x_n - x_{n+1} = 0$. Musi więc dla podstawienia (44) równanie charakterystyczne $D(\varrho) = 0$, które można napisać w postaci:

$$(B - A + \varrho)(\theta - \varrho) \cdot |A_{ik} - \varrho_{ik}| = 0, \quad (i, k = 1, 2, \dots n - 1)$$

posiadać albo n pierwiastków równych, albo wszystkie $n + 1$ pierwiastki równe. Mamy

Twierdzenie XV: *Jeżeli równanie*

$$(B - A + \varrho)(\theta - \varrho)|A_{ik} - \varrho_{ik}| = 0$$

ma n pierwiastków równych, to zachodzi równość $\theta = A - B$.

W samej rzeczy, wiemy, że moduł wyznacznika $|A_{ik}|$ jest 1 (str. 22); niech $|A_{ik}| = e^{ci}$. Jeżeli równanie

$$|A_{ik} - \varrho_{ik}| = 0$$

ma mieć wszystkie pierwiastki równe, np. θ, to będzie $\theta = e^{\frac{ci}{n-1}}$; z zależności zaś:

$$\theta^0 (A - B) = 1$$

wynika: $A - B = e^{\frac{ci}{n-1}}$, czyli wszystkie $n + 1$ pierwiastków równania $D(\varrho) = 0$ są równe.

Możemy dalej zawsze zakładać, że wyznacznik $|A_{ik}|$ równa się jedności, gdyż w przeciwnym razie, zamiast wszystkich x', możemy w podstawieniach grupy $\bar{g}$ napisać ich iloczyny przez $e^{\frac{ci}{n-1}}$, przez co stosunki $y_k = x_k : x_{n+1}$ nie zmienią się i wyznacznik $|A_{ik}|$ będzie równy 1.

Wtedy równanie $D(\varrho) = 0$ będzie mogło mieć n pierwiastków równych 1, i mieć będziemy prócz tego

$$A = B + 1, \quad \theta = A - B;$$

podstawienia grupy $\bar{g}$ będą przeto postaci:

$$(45) \quad \left|\begin{array}{llll} A_{11}, \dots & A_{1, n-1}, & A_1, & -A_1, \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n-1, 1}, \dots & A_{n-1, n-1}, & A_{n-1}, & -A_{n-1} \\ B_1, \dots & B_{n-1}, & B + 1 & -B \\ B_1, \dots & B_{n-1}, & B, & -B + 1 \end{array}\right|,$$

z wyznacznikiem

$$|A_{ik}| = 1,$$

gdzie, oprócz zależności:

$$\sum_{i=1}^{n-1} A_{ik} A_{ik}^0 = 1, \quad \sum_{i=1}^{n-1} A_{ik} A_{is}^0 = 0, \quad (k \neq s \equiv 1, 2, \ldots n-1)$$

zachodzących między elementami wyznacznika $|A_{ik}|$, spełniać się będą zależności:

$$(46) \qquad \begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n-1} A_i A_i^0 + B + B^0 = 0, \\ &\sum_{i=1}^{n-1} A_i A_{ir}^0 + B_r^0 = 0, \quad (r = 1, 2, \ldots n-1) \end{aligned}$$

i warunki, zawarte w równości:

$$|A_{ik}' - \varrho_{ik}| \equiv 0 \pmod{(\varrho - 1)^{n-2}}.$$

Podstawienia grupy ciągłej Γ, jako nie zmieniające i punktu $(0, 0, \ldots 1, 1)$ i hyperpłaszczyzny $x_n - x_{n+1} = 0$, będą musiały być tej samej postaci:

$$(47) \qquad \begin{vmatrix} a_{11}, \ldots & a_{1,n-1}, & a_1, & -a_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n-1,1}, \ldots & a_{n-1,n-1}, & a_{n-1}, & -a_{n-1} \\ b_1, \ldots & b_{n-1}, & a, & \theta - a \\ b_1, \ldots & b_{n-1}. & b, & \theta - b \end{vmatrix},$$

gdzie, jak poprzednio, możemy przyjąć, że wyznacznik $|a_{ik}| = 1$.

Każde z podstawień (47) grupy Γ musi być, zgodnie z twierdzeniem X, *przemienne* z każdem podstawieniem (45) grupy g; po dokonaniu odpowiednich rachunków, warunki przemienności podstawień (45) i (47), znajdziemy w następującej postaci: macierze

$$\|a_{ik}\|, \quad \|A_{ik}\|$$

muszą być przemienne i prócz tego spełniać się muszą $2n-1$ zależności,

$$(48) \qquad \begin{aligned} &A_{i1} a_1 + A_{i2} a_2 + \ldots + A_{i,n-1} a_{n-1} + A_i(a-b) = \\ &a_{i1} A_1 + a_{i2} A_2 + \ldots + a_{i,n-1} A_{n-1} + a_i, \quad i = 1, 2, \ldots n-1 \\ &A_{1i} b_1 + A_{2i} b_2 + \ldots + A_{n-1,i} b_{n-1} + B_i \theta = \\ &a_{1i} B_1 + a_{2i} B_2 + \ldots + a_{n-1,i} B_{n-1} + b_i, \quad i = 1, 2, \ldots n-1 \\ &B_1 a_1 + B_2 a_2 + \ldots + B_{n-1} a_{n-1} + B(a-b) = \\ &b_1 A_1 + b_2 A_2 + \ldots + b_{n-1} A_{n-1} + B\theta. \end{aligned}$$

Otrzymujemy następujące

Twierdzenie XVI: *Linjowo niezależne funkcje automorficzne $f_1, f_2, \ldots f_n$ n zmiennych $y_1, y_2, \ldots y_n$, należące do grupy hyperfuch-*

sowskiej G, zawierającej podgrupę g o wskaźniku skończonym, utworzoną z podstawień (45), *spełniających warunek:*

$$|A_{ik} - \varrho_{ik}| \equiv 0 \pmod{(\varrho - 1)^{n-2}},$$

związane są za pomocą n zależności algebraicznych

$$R_i(f_i(Ty), f_1, f_2, \dots f_n) = 0, \quad i = 1, 2, \dots n$$

z n funkcjami przekształconemi $f_i(Ty)$, w których T jest dowolnem podstawieniem grupy ciągłej Γ, utworzonej z podstawień (47), *nie zmieniających formy Hermitea $x_1 x_1^0 + x_2 x_2^0 + \dots + x_n x_n^0 - x_{n+1} x_{n+1}^0$ i spełniających równość $\theta^0(a-b) = 1$ i warunki* (48) *wraz z warunkiem, że macierze $\|a_{ik}\|$ i $\|A_{ik}\|$ są przemienne.*

W samej rzeczy, jeżeli grupa hyperfuchsowska G zawiera podgrupę g o wskaźniku skończonym, utworzoną z podstawień (45), to grupy G i $T^{-1} G T$ będą miały wspólną podgrupę g, ponieważ grupa g, ze względu na własność $g = T^{-1} g T$, wchodzić będzie w skład grupy $T^{-1} G T$.

Przechodząc do przypadku II, kiedy grupa g zawiera nieskończoną lizbę punktów stałych, leżących na hyperpłaszczyźnie $x_n - x_{n+1} = 0$, zauważymy, że podstawienia $\overline{T}$ grupy ciągłej $\overline{\Gamma}$:

$$\begin{aligned} x'_k &= \sum_{i=1}^{n-1} a_{ki} x_i + a_k (x_n - x_{n+1}), \\ x'_n - x'_{n+1} &= (a-b)(x_n - x_{n+1}), \quad \theta^0(a-b) = 1, \\ x'_{n+1} &= \sum_{i=1}^{n-1} b_i x_i + b(x_n - x_{n+1}) + \theta x_{n+1} \end{aligned} \tag{49}$$

spełniające zależności (42) i 43), będą musiały pozostawiać bez zmiany każdy punkt $(k_1, k_2, \dots k_{n-1}, k', k')$, leżący na hyperpłaszczyźnie $x_n - x_{n+1} = 0$; warunek ten pociągnie za sobą równości:

$$a_{ii} = 1, \quad a_{ki} = 0, \quad k \neq i, \quad k, i = 1, 2, \dots n-1$$
$$b_i = 0, \quad \theta = 1.$$

Lecz z ostatniej z zależności (43):

$$\sum_{i=1}^{n-1} a_i a_{ir}^0 + b_r^0 (a-b) = 0$$

przy $r = 1, 2, \dots n-1$, otrzymamy kolejno:

$$a_1 = a_2 = \dots = a_{n-1} = 0;$$

będą przeto podstawienia $\overline{T}$ grupy $\overline{\Gamma}$ postaci:

$$x'_k = x_k, \quad x'_n = a x_n + (1-a) x_{n+1}, \quad x'_{n+1} = b x_n + (1-b) x_{n+1}.$$

Z wzoru zaś

$$\sum_{l=1}^{n-1} a_l a_l^0 + aa^0 - bb^0 = 1$$

mamy dalej:

$$aa^0 - bb^0 = 1,$$

skąd, ze względu na warunek: $a - b = 1$, wynikający z $\theta^0(a-b) = 1$, mamy:

$$b + b^0 = 0.$$

Kładąc więc: $b = iK$, mieć będziemy podstawienia grupy $\overline{\Gamma}$ w postaci:

(50) $$x'_K = x_K,\ x'_n - x'_{n+1} = x_n - x_{n+1},\ x'_{n+1} = Ki(x_n - x_{n+1}) + x_{n+1},$$

gdzie K jest parametrem rzeczywistym.

Na wyznaczenie grupy nieciągłej $\overline{g}$, będącej w danym przypadku, zbiorem podstawień postaci (49), mających nieskończoną liczbę punktów stałych, lężących w hyperpłaszczyźnie $x_n - x_{n+1} = 0$, mamy warunek przemienności jej podstawień z podstawieniami (50) grupy ciągłej $\overline{\Gamma}$. Po dokonaniu odpowiednich rachunków, znajdziemy, jako jedyny warunek, zależność:

$$\theta = a - b;$$

mieć więc będziemy: $\theta\theta^0 = 1$, skąd $\theta = e^{hi}$.

Otrzymujemy następujące:

Twierdzenie XVII: *Linjowo niezależne funkcje automorficzne* $f_1, f_2, \ldots f_n$ *zmiennych* $y_1, y_2, \ldots y_n$, *należące do grupy hyperfuchsowskiej* G, *zawierającej podgrupę* g *o wskaźniku skończonym, utworzoną z podstawień postaci:*

$$x'_K = \sum_{l=1}^{n-1} a_{Kl} x_l + a_K(x_n - x_{n+1})$$

$$x'_n - x'_{n+1} = e^{hi}(x_n - x_{n+1})$$

$$x'_{n+1} = \sum_{l=1}^{n-1} b_l x_l + b(x_n - x_{n+1}) + e^{hi} x_{n+1},$$

nie zmieniających formy Hermitea $\sum_{l=1}^{n} x_l x_l^0 - x_{n+1} x_{n+1}^0$ *i zawierających nieskończoną liczbę punktów stałych, leżących w hyperpłaszczyźnie* $x_n - x_{n+1} = 0$, *związane są zapomocą* n *zależności algebraicznych z* n *funkcjami przekształconemi* $f_l(Ty)$, *w których podstawienie* T *jest dowolnem podstawieniem grupy ciągłej* Γ, *utworzonej z podstawień:*

$$x'_K = x_K,\quad x'_n - x'_{n+1} = x_n - x_{n+1},\quad x'_{n+1} = Ki\,(x_n - x_{n+1}) + x_{n+1},$$

gdzie K jest parametrem rzeczywistym.

Otrzymane dwa twierdzenia zawierają wyniki naszych badań nad przekształceniem linjowem funkcyj hyperfuchsowskich w przypadku, kiedy wielościan zasadniczy grupy niema punktów wspólnych z obszarem zasadniczym; przypadek ten w teorji funkcyj hyperfuchsowskich odpowiada 1-ej „famille" funkcyj Fuchsa w klasyfikacji, podanej przez Poicarégo. Przy rozpatrzeniu podobnem innych przypadków napotykamy na znaczne trudności już przy samem wyjaśnieniu istnienia zależności algebraicznych między $n+1$ funkcjami, należącemi do tej samej grupy.

W pracy niniejszej pomijaliśmy od samego początku przypadek elementarny, kiedy funkcja automorficzna wielu zmiennych sprowadza się do algebraicznej. Wszystkie przeto nasze wyniki odnoszą się do przypadków, kiedy funkcje hyperfuchsowskie nie są algebraicznemi. Zajmując się przekształceniem linjowem, pomijaliśmy prócz tego w naszem badaniu przypadki, w których grupa hyperfuchsowska jest zbiorem podstawień, nie zmieniających pewnej hyperpłaszczyzny, gdyż, wtedy, jak to okazaliśmy, mogą zachodzić przypadki przekształcenia nielinjowego. Zakładając więc, że 1) wielościan grupy niema punktów wspólnych z obszarem zasadniczym, 2) że funkcja nie jest algebraiczną, 3) że grupa nie jest zbiorem podstawień, pozostawiających bez zmiany pewną hyperpłaszczyznę, doszliśmy w wyniku naszych badań do dwu twierdzeń XVI i XVII, w których podane zostały dwie klasy funkcyj hyperfuchsowskich, dla których, jak okazaliśmy, zadanie o przekształceniu jest możliwe.

Co do tych dwu gatunków funkcyj hyperfuchsowskich, zauważyć jeszcze musimy, że w ciągu naszego badania, w celu uproszczenia zadania, pomijaliśmy niejednokrotnie z różnych powodów całe szeregi grup hyperfuchsowskich, mianowicie: 1) w przypadkach, kiedy stwierdzaliśmy, że funkcja hyperfuchsowska wyrażała się algebraicznie przez drugą (str. 27), ograniczaliśmy się do rozpatrzenia tej ostatniej, 2) grupę badaną zamienialiśmy przy badaniu na podobną (str. 16), przez co wprowadzaliśmy funkcję $f(Qy)$ zamiast $f(y)$, gdzie Q jest pewnem podstawieniem, 3) pomijaliśmy wreszcie przypadki (str. 28), w których dało się okazać, że po przekształce-

niu grupy na podobną liczba zmiennych w grupie dała się zredukować do liczby mniejszej, niż n. Mając to teraz na uwadze, możemy wynik naszych badań wyrazić tak: funkcje hyperfuchsowskie $f(y)$, dla których zadanie o przekształceniu jest możliwe, są albo funkcjami $f(y)$, należącemi do jednej z dwu klas, podanych w twierdzeniach XVI i XVII, albo są funcjami postaci $f(Qy)$, albo funkcjami algebraicznemi funkcyj $f(y)$, i $f(Qy)$.

Ponieważ w rozważaniach naszych pomijaliśmy stale te przypadki, w których liczba zmiennych grupy hyperfuchsowskiej mogła być zredukowaną do liczby mniejszej, niż n, to pozostaje nam jeszcze rozpatrzeć przypadek, kiedy liczba zmiennych wynosi 1.

W przypadku funkcyj jednej zmiennej, mieć będziemy tylko zbiór E_0. Ażeby każde podstawienie linjowe grupy ciągłej Γ jednej zmiennej mogło pozostawiać bez zmiany punkty zbioru E_0, zbiór E_0 będzie mógł zawierać conajwyżej dwa punkty lub jeden. W przypadku dwu punktów, możemy przyjąć je za 0 i ∞; podstawienia grupy g będą typu: $x' = kx$; w przypadku zaś jednego punktu, punkt ten możemy przyjąć za ∞, i podstawienia grupy g będą typu: $x' = x + b$. Grupy ciągłe Γ będą tych samych typów; funkcje, należące do grupy g, będą redukowały się albo do funkcyj z jednym perjodem, albo z dwoma.